1. ФУНКЦІЯ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ЧАСТИННІ ДИФЕРЕНЦІАЛИ. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ І ЙОГО ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

1.1. Функція багатьох змінних

Функція багатьох змінних – це функція декількох аргументів.

Нехай D - множина упорядкованих пар чисел (x, y). Якщо кожній парі чисел (x,y) за певним законом відповідає число z, то вважають, що визначено функцію z від двох змінних x та y і позначають її $z = f(x, y)$.

Змінна z є залежною змінною, тобто функцією, а x та y – незалежні змінні (аргументи функції).

Наприклад: аргументами можуть бути в фізичних задачах - координати точки, час; у хімії – концентрації компонент системи, температура, час і інші величини.

Множина пар значень (x, y), для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називається областю визначення функції і позначається $D(f)$.

Задавати функцію багатьох змінних можна ***аналітично***, *тобто у вигляді формули*. ***Таблично*** і ***графічно*** задати функцію багатьох змінних можливо лише у випадку функції двох змінних. Функція двох змінних утворює поверхню в трьохвимірному просторі, див. рис.1(a, b).

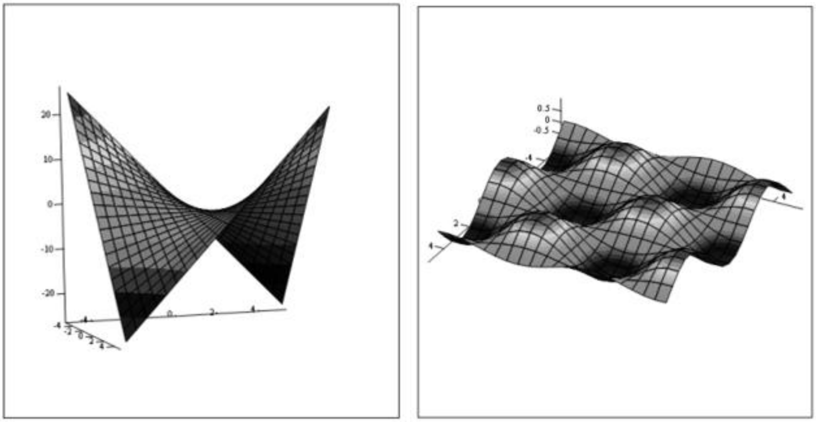

Рис. 1.1. Функції двох змінних. a) $f(x, y) = xy$; b) $f(x) = \cos x \sin y$.

На жаль, функції більше двох змінних не можуть бути представлені в тривимірному світі! Проте, вивчаючи функції тільки двох змінних, ми маємо знати, що правила, справедливі для них, можуть бути поширені на функції будь-якої більшої кількості змінних.

1.2. Частинні похідні

Для функції більш ніж однієї змінної не існує звичайної похідної, яка має фізичний зміст миттєвої швидкості. Тому виникає питання: як ми виміряємо швидкість зміни для функцій більш ніж однієї змінної? Це питання призводить до поняття частинних похідних.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$.

Якщо надати приріст аргументу *x* при фіксованому *y*, отримаємо приріст функції $\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Якщо існує

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = z'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \tag{1.1}$$

то вона називається ***частинною похідною функції*** *z* за змінною *x*.

Її ще можна позначати так: $f'_x(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. (1.2)

Аналогічно, похідна за *y* при фіксованому *x* позначається $z'_y(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, або $f'_y(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Тобто, частинна похідна функції багатьох змінних обчислюється на основі припущень, що змінюється лише один із аргументів, а інші постійні.

Функція *z = f(x,y)* буде **неперервною** в деякій області *D*, якщо вона має частинні похідні z'_x, z'_y у кожній точці цієї області.

Приклади.

1. Знайти частинні похідні функції $z = e^{xy}$.

Розв'язання. *Вважаючи, що y – стала, знайдемо частинну похідну за x:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \cdot y;$$

аналогічно знайдемо частинну похідну за y, вважаючи x сталою:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} \cdot x.$$

2. *Знайти частинні похідні функції* $f(x, y) = yx$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, y)'_x = (yx)'_x = y(x)'_x = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x;$$

3. *Знайти частинні похідні функції* $f(x, y, z) = \sin(xyz)$.

Розв'язання.

Нехай $u = xyz$, *тоді* $\sin(xyz) = \sin u$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$f'_x = \left(\sin(xyz)\right)'_x = \cos(xyz)\cdot(xyz)'_x = \cos(xyz)\cdot yz(x)'_x = yz\cos(xyz);$$

аналогічно

$$f'_y = xz\cos(xyz);$$

$$f'_z = xy\cos(xyz).$$

4. *Знайти частинні похідні функції* $z = \ln tg\frac{x}{y}$.

Розв'язання.

Нехай $u(x,y) = \frac{x}{y}$, $v(u) = tgu$, $f(v) = \ln v$,

$$z = f(v(u(x,y)))$$

$$z' = \left(f(v(u(x,y)))\right)' = f'(v)\cdot v'(u)\cdot u'(x,y)$$

$$u'_x = \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}\cdot(x)'_x = \frac{1}{y},$$

$$u'_y = \left(\frac{x}{y}\right)'_x = x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y = x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right).$$

$$v'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u',$$

$$f'(v) = \frac{1}{v}\cdot v' = \frac{1}{tgu}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'.$$

Вважаючи y константою, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln tg\frac{x}{y})'_x = \frac{1}{tg\frac{x}{y}}\cdot(tg\frac{x}{y})'_x = \frac{1}{tg\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot(\frac{x}{y})'_x = \frac{1}{tg\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}.$$

Аналогічно, при x= const, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{tg\frac{x}{y}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot(-\frac{x}{y^2}) = -\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

5. *Знайти частинні похідні функції* $u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5.$

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5)'_x = (x^3y^2z)'_x + (2x)'_x - (3y)'_x + (z)'_x + (5)'_x =$$

$$= y^2z(x^3)'_x + 2 - 0 + 0 + 0 = 3x^2y^2z + 2,$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz - 3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2 + 1.$$

1.3. Частинні похідні вищих порядків, змішані похідні

Для функції багатьох змінних можна брати похідні від похідних першого порядку, тоді отримаємо похідні другого порядку за кожним із аргументів, вважаючи при диференціюванні за одним із аргументів інші аргументи постійними. Такі похідні називаються ***частинними похідними*** другого порядку за *x* або за *y*. Позначаються z''_x, z''_y або $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Наприклад. Функція двох змінних $z = f(x, y)$ має дві частинні похідні другого порядку за *x* і за *y*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx} = f''_{xx}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy} = f''_{yy}; \qquad (1.3)$$

а також дві ***змішані*** похідні, які отримуються при диференціюванні

z'_x за *y* та z'_y за *x*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy} \qquad (1.4)$$

Частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, що називаються ***змішаними***, відрізняються тільки порядком диференціювання. Тому справедливо: $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Рівняння в частинних похідних описують процеси у просторових системах: поширення хвиль, теплопровідність, кінетику хімічних реакцій, функціонування органів, популяцій та ін. про що ми дізнаємося у процесі вивчення медичної та біологічної фізики.

1.4. Частинний і повний диференціали функції багатьох змінних

Частинні диференціали функції двох змінних $z = f(x, y)$ визначаються так:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx; \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (1.5)$$

Повний диференціал - сума частинних диференціалів функції $z = f(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = z'_x dx + z'_y dy. \qquad (1.6)$$

Приклади

1. *Знайти повний диференціал функції* $z = \ln \frac{x}{y}$.

Розв'язання. *Знайдемо частинні похідні за змінними x та y:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = -\frac{1}{y} .$$

Тоді повний диференціал: $dz = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy$.

2. *Знайти повний диференціал функції* $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + xy - y^2)'_x = 2x + y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + xy - y^2)'_y = x - 2y;$$

$$df = (2x + y)dx + (x - 2y)dy.$$

3. *Знайти повний диференціал функції* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (y^2)'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1.5. Вимірювання фізичних величин

За допомогою вимірювань встановлюється кількісна сторона природних явищ. Вимірювання є одним із основних засобів пізнання навколишнього світу, в результаті якого отримується вимірювальна інформація.

Згідно Закону України «Про метрологію та метрологічну діяльність», ***вимірюванням*** вважається процес експериментального визначення одного або декількох значень величини, які можуть бути обґрунтовано приписані величині. Вимірювання поділяються на ***прямі*** і ***непрямі***.

При **прямому вимірюванні** результат одержують безпосередньо за експериментальними даними (напр. вимірювання довжини лінійкою, вимірювання температури термометром, вимірювання артеріального тиску тонометром). Вони є найпоширенішими.

При **непрямому вимірюванні** числове значення величини отримують не безпосередньо, а на основі вимірювання інших величин, пов'язаних з вимірюваною величиною відомою математичною залежністю (напр. визначення об'єму рідини у циліндричній посудині за висотою рідини в ній та площею дна $V=Sh$; густини рідини за масою та її об'ємом: $\rho=m/V$).

1.6. Абсолютна та відносна похибки вимірювань

Точність вимірювань — це характеристика ступеня наближення результату вимірювання до істинного значення вимірюваної величини, яка є важливою ознакою вимірювання.

Різниця між виміряним чи обчисленим значенням величини та її істинним значенням називається ***похибкою*** вимірювання. Важливо вміти оцінювати похибки результатів вимірювання, а також похибки результатів дій над ними.

У процесі вимірювань не можна отримати істинне значення вимірюваної величини, тому що на результат вимірювання можуть впливати різні чинники і внаслідок цього кожне вимірювання має якусь похибку. Похибки вимірювань поділяються на ***систематичні***, ***випадкові*** і ***промахи***.

Систематичні похибки зумовлені обмеженою точністю вимірюваних приладів або виникають при неправильному встановленні приладу. Вони носять постійний характер чи змінюються за певним законом у всіх повторних вимірюваннях.

Випадкові похибки виникають унаслідок недосконалості органів відчуттів експериментатора. Ці похибки призводять до незначних відмінностей результатів вимірювання, їх неможливо передбачити наперед (напр. коливання повітря у приміщенні, де проводиться зважування на точній вазі).

Промахи – це грубі помилки, які призводять до появи результатів, що значно відрізняються від інших у даній серії випробувань. Це наслідок неправильного відліку чи інших помилок дослідника. Такі результати при обробці даних експерименту відкидають.

Загальна похибка вимірювань буде визначатися сумою систематичної і випадкової похибок.

Чим точніший прилад, тим менша систематична похибка. Проте, в цьому випадку збільшується випадкова.

Розглянемо обчислення похибок при вимірюванні фізичних величин, які зумовлені похибками приладів. **Похибка приладу** *розраховується за точністю, вказаною на приладі*, або *дорівнює половині ціни поділки його шкали*. Напр., якщо на шкалі хронометра нанесені тільки секунди, то він не буде фіксувати час, менший за секунду.

Якщо за допомогою приладу вимірюється величина X, а в результаті n вимірювань отримуємо значення цієї величини x_i, то ***абсолютна похибка*** окремого вимірювання – це різниця між виміряним x_i і середнім значенням величини X, яке позначимо x_c:

$$\Delta x_i = \left| x_i - x_c \right|, \text{ де } i = 1, 2, 3 \ldots n. \tag{1.7}$$

Абсолютна похибка вимірювання виражається в одиницях вимірюваної величини.

Відносна похибка вимірювання - це похибка вимірювання, виражена як відношення абсолютної похибки до середнього значення величини X.

Відношення

$$\Delta x / x_c \tag{1.8}$$

це ***відносна похибка*** вимірювань величини X (x_c - середнє значення всіх x_i).

Вираження похибок вимірювання в абсолютній або відносній формі зумовлено історичними традиціями, які склалися в певних галузях вимірювань. Ці традиції часто знаходять закріплення в нормативних документах.

1.7. Знаходження похибок непрямих вимірювань з використанням повного диференціалу

Повний диференціал використовується для знаходження абсолютної та відносної похибок непрямих вимірювань.

Якщо величина z розраховується за формулою $z = f(x, y)$ на основі прямо виміряних x і y, то ***абсолютна похибка вимірювань*** $|dz|$ визначається так:

$$|dz| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| dx + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| dy \qquad (1.9)$$

Відносна похибка вимірювань δ обчислюється за формулою:

$$\delta = \frac{|dz|}{z} \cdot 100\%. \qquad (1.10)$$

Приклад.

Знайти абсолютну і відносну похибки непрямих вимірювань величини $z = x^2 y$.

Розв'язання. *Для знаходження абсолютної похибки знайдемо частинні похідні:* $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$.

Тоді абсолютна похибка вимірювань: $|dz| = |2xy| dx + |x^2| dy$, *а відносна похибка:* $\delta = \left(\left|\frac{2}{x}\right| dx + \left|\frac{1}{y}\right| dy \right) \cdot 100\%.$

Контрольні запитання

1. Функції багатьох змінних. Способи їх задання.
2. Частинні похідні.
3. Частинні похідні вищих порядків, змішані похідні.
4. Частинний і повний диференціали функції багатьох змінних.
5. Вимірювання фізичних величин.
6. Поняття про абсолютну та відносну похибки вимірювань.
7. Знаходження похибок вимірювань з використанням повного диференціалу.

Завдання для самостійної практичної роботи

1.Знайти частинні похідні функцій:

1) $z = x^2 + 3y;$ 2) $z = \frac{4}{x^2 + y^2};$ 3) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$:

4) $z = \sqrt{xy};$ 5) $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};$ 6) $z = \frac{xy}{y - x}.$

2.Знайти частинні похідні і частинні диференціали функцій:

1. $z = x^3 + y^3 - 3axy;$

6. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 - y^2});$

2. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$;

3. $z = x^y$;

4. $z = \dfrac{y}{x}$;

5. $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$;

7. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$;

8. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

9. $z = \dfrac{y^2 - x^3}{x^2 - y^3}$;

10. $z = e^{\frac{1}{xy}}$.

11. $z = \dfrac{y}{x}$ *при* $x = 2,\ y = 1,\quad dx = 0{,}1;\ dy = 0{,}2.$

12. $z = e^{xy}$ *при* $x = 1,\ y = 2,\quad dx = -0{,}1;\ dy = 0{,}1.$

3.Знайти повні диференціали функцій:

1. $z = x^2 y^2$;
2. $z = yx^y$;
3. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$;
4. $z = \ln(x^2 + y^2)$;
5. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;
6. $z = \ln(1 + \dfrac{x}{y})$;
7. $u = xyz$;
8. $u = (xy)^z$;
9. $z = 3x^4 + 5x^2 y$;
10. $z = \ln(x^2 + y^2)$;

4. ***Знайти абсолютну і відносну похибки непрямих вимірювань величини z, якщо величини x і y виміряні прямо:***

1) $z = \dfrac{y}{x^2}$;
2) $z = xy^2$;
3) $z = x^3 y$;
4) $P = IU$;
5) $R = \dfrac{U}{I}$;
6) $\rho = \dfrac{m}{V}$;
7) $I = \dfrac{U}{R}$
8) $\eta = \eta_0 \dfrac{t_1}{t_2}$; $\eta_0 = const$;
9) $z = 3x^2 y$;
10) $k = k_1 \cdot k_2$;
11) $m = \rho V$;
12) $\nu = \dfrac{m}{h^2}$.

5. Яка потужність сушильної шафи, якщо амперметр показує силу струму 0,5*А* при граничній похибці приладу 10*мА*, а вольтметр показує напругу 215*В* при граничній похибці 2*В*?