3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ПОРЯДКУ. МЕТОДИ ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

3.1. Поняття диференціального рівняння

Рівняння, яке містить незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ і похідні цієї функції $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, називається ***диференціальним***. У загальному вигляді диференціальне рівняння записується так:

$$F\left[x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] = 0, \tag{3.1}$$

або $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, чи $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0.$

3.2. Порядок диференціального рівняння

Порядок диференціального рівняння визначається порядком найвищої похідної, що входить в це рівняння.

3.3. Розв'язок диференціального рівняння

Функція $y = f(x)$ називається ***розв'язком*** диференціального рівняння, якщо останнє перетворюється у тотожність після підстановки в нього $y = f(x)$.

Розв'язок диференціального рівняння в простих випадках зводиться до обчислення інтеграла, тому розв'язок диференціального рівняння називають також ***інтегралом,*** а процес відшукання всіх розв'язків – ***інтегруванням*** диференціального рівняння.

3.4. Поняття загального і частинного розв'язків диференціального рівняння

Розв'язок, отриманий у результаті інтегрування диференціального рівняння, містить у загальному випадку довільні сталі, кількість яких визначається порядком диференціального рівняння. Тому з***агальний розв'язок*** диференціального рівняння – це функція $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність. Геометрично загальний розв'язок являє собою сімейство інтегральних кривих, які відрізняються сталою інтегрування.

Із загального розв'язку можна отримати ***частинний розв'язок*** при заданні значень довільних сталих, виходячи з умов, які повинні задовольнити шуканий частинний розв'язок. Задання цих умов називається ***заданням початкових умов*** і для диференціального рівняння першого порядку записується так:

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{або} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0 \tag{3.2}$$

Частинний розв'язок диференціальних рівнянь вищого порядку знаходиться з загального розв'язку при заданих початкових умовах: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0) = a$, $y''(x_0) = b$...,де a,b... – сталі. Геометрично – це одна крива, що проходить через точку (x_0,y_0).

Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називають ***звичайним диференціальним рівнянням***.

У випадку функції багатьох змінних диференціальне рівняння називають ***рівнянням у частинних похідних***.

Диференціальні рівняння в частинних похідних описують напр., такі фізичні процеси: дифузію, теплопровідність, розповсюдження хвиль у середовищі.

3.5. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку: $F(x, y, y') = 0$. Його загальний розв'язок: $y = f(x,C)$.

Диференціальне ***рівняння з відокремленими змінними***:

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = 0. \tag{3.3}$$

Його загальний розв'язок:

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C. \tag{3.4}$$

3.6. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Диференціальне ***рівняння з відокремлюваними змінними*** – це рівняння вигляду:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0. \tag{3.5}$$

Якщо поділити обидві частини рівняння на $\varphi_1(y) f_2(x)$, то воно може бути приведене до ***рівняння з відокремленими змінними***:

$$\frac{f_1(x)\varphi_1(y)}{\varphi_1(y) f_2(x)}dx + \frac{f_2(x)\varphi_2(y)}{\varphi_1(y) f_2(x)}dy = 0, \tag{3.6}$$

звідки отримаємо:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0. \tag{3.7}$$

Інтегруючи суму двох диференціалів, отримаємо ***загальний розв'язок:***

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C. \qquad (3.8)$$

де C- стала інтегрування.

Приклади.

1. *Знайти загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння: $y' = xy$, якщо при x=0, y=3.*

Розв'язання. Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, представимо рівняння у вигляді: $\dfrac{dy}{dx} = xy$.

Для того, щоб привести дане рівняння до вигляду, коли його можна буде інтегрувати, помножимо обидві частини рівняння на dx (відокремимо диференціали) і поділимо на y. Отримаємо рівняння з відокремленими змінними $\dfrac{dy}{y} = xdx$ і проінтегруємо його: $\int \dfrac{dy}{y} = \int xdx$;

звідки $\ln|y| = \dfrac{x^2}{2} + \ln|C|$ (якщо шукана функція знаходиться під логариф-мом, сталу зручно вибирати в логарифмічному вигляді). Тоді $\ln|y| - \ln|C| = \dfrac{x^2}{2}$, а за властивостями логарифмів $\ln\left|\dfrac{y}{C}\right| = \dfrac{x^2}{2}$. Пропотенціюємо отримане рівняння (тобто, виконаємо дію, обернену до логарифмування), внаслідок чого отримаємо: $\dfrac{y}{C} = e^{\frac{x^2}{2}}$, звідки $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ - загальний розв'язок заданого рівняння. Підставимо в загальний розв'язок початкові умови, тобто x=0, y=3: $3 = Ce^0$, звідки знайдемо числове значення сталої: C=3. Підставивши в загальний розв'язок значення C=3, отримаємо частинний розв'язок диференціального рівняння: $y = 3e^{\frac{x^2}{2}}$.

2. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx} = x$.*

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dt} = x \quad \Rightarrow \quad dy = xdx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int xdx;$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

3. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння* $\frac{dy}{dx} = 2x.$

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dy = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int 2xdx$$

y=x²+C.

4. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння* $\frac{dy}{dx} = \sin x.$

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow \quad dy = \sin xdx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int \sin xdx$$

y=-cosx+C.

5. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння* $\frac{dy}{dx} = 3e^x.$

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x \quad \Rightarrow \quad dy = 3e^x dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int 3e^x dx$$

y=3eˣ+C.

6. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння*

$$\frac{dy}{dx} = x^{-2} + x + \cos x$$

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx} = x^{-2} + x + \cos x \quad \Rightarrow \quad dy = (x^{-2} + x + \cos x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dy = \int (x^{-2} + x + \cos x)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int x^{-2}dx + \int xdx + \int \cos xdx.$$

$y=-x^{-1}+0.5x^2+\sin x+C.$

3.7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають вигляд:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3.10}$$

де p, q - числа.

Їх розв'язок шукають у вигляді: $y = e^{kx}$, де k - число. ***Характеристичне рівняння*** має вигляд: $k^2 + pk + q = 0$.

Якщо k є коренем характеристичного рівняння, то функція $y = e^{kx}$ буде розв'язком рівняння $y'' + py' + qy = 0$.

Корені характеристичного рівняння знаходять за формулою:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{3.11}$$

При розв'язку характеристичного рівняння можливі три випадки. Розглянемо їх.

1) Якщо ***корені характеристичного рівняння дійсні і різні***, то всі розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами визначаються так:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{3.12}$$

де C_1, C_2 - сталі.

Приклад. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння* $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Розв'язання. *Запишемо характеристичне рівняння:* $k^2 - 4k + 3 = 0$. *Корені рівняння* $k_1 = 1; k_2 = 3$ *- дійсні і різні числа. Тому загальний розв'язок рівняння* $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

2) Якщо ***корені характеристичного рівняння дійсні і рівні*** ($k_1 = k_2 = k$), то всі розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами визначаються так:

$$y = (C_1 x + C_2) e^{kx}. \tag{3.13}$$

Приклад. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. *Запишемо характеристичне рівняння:* $k^2 - 6k + 9 = 0$. *Корені рівняння* $k_1 = k_2 = 3$ *- дійсні і рівні. Тому загальний розв'язок рівняння:*

$$y = (C_1 x + C_2) e^{3x}.$$

3) Якщо ***корені характеристичного рівняння уявні,*** $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, ($i = \sqrt{-1}$), то всі розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами визначаються так:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{3.13}$$

Отриманий розв'язок - це рівняння, що описує процес коливань. При α >0 амплітуда коливань зростає, при α =0 – не змінюється, а при α <0 – зменшується.

Приклад. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння* $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. *Запишемо характеристичне рівняння:* $k^2 - 2k + 5 = 0$. *Корені рівняння уявні:* $k_{1,2} = 1 \pm 2i$. *Тому загальний розв'язок рівняння:* $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Контрольні запитання

1. Поняття диференціального рівняння.
2. Порядок диференціального рівняння.
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
4. Поняття загального і частинного розв'язку диференціального рівняння.
5. Геометричний зміст розв'язків диференціального рівняння.
6. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними.
7. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.
8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
9. Поняття характеристичного рівняння.
10. Знаходження коренів характеристичного рівняння.
11. Знаходження всіх розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Завдання для самостійної практичної роботи

1. Знайти загальні та частинні розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку:

1) $y' = 10x^2$,при $x = 0, y = 0;$ 2) $y' = 5xy$, при $x = 0, y = 1;$

3) $y' = y^2$, при $x = 1, y = 1;$ 4) $y' tgx - y = 1$, при $x = \pi/2$, $y = 1$

5) $ydy - xdx = dx$, при $x = 2, y = 0.$

2. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку:

1) $y' = y^2 \sin x;$ 2) $(x+3)dy - (y+3)dx = 0;$ 3) $y' = -x + 2^x;$

4) $xyy' = 1 - x;$ 5) $(x+a)dx = xdy;$ 6) $\dfrac{dx}{dt} = x \cos t;$

7) $e^y y' = 4x^{3;}$ 8) $xydx + (x+1)dy = 0;$ 9). $2ydx = 3xdy$.

3. Знайти загальні розв’язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

1). $y'' + 2y' + 2y = 0$; 2). $y'' + y' + y = 0$;

3). $y'' - 6y' + 8y = 0$; 4). $y'' - 4y' + 5y = 0$;

5). $y'' - 2y' + y = 0$; 6). $y'' - 7y' + 10y = 0$;

7). $y'' + 4y' + 4y = 0$; 8). $y'' - 2y' + 2y = 0$;

9). $y'' - 2y' + 17y = 0$; 10). $y'' + 4y' + 3y = 0$;

11). $y'' + 10y' + 25y = 0$.

4. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ФАРМАКОКІНЕТИЧНІ МОДЕЛІ

Диференціальне рівняння, яке отримане при дослідженні деякого реального явища чи процесу, називається диференціальною моделлю цього явища чи процесу. Диференціальні рівняння називають ще динамічними математичними моделями описуваних ними реальних об'єктів. У таких моделях, крім шуканих величин, містяться також похідні цих величин, які відображають швидкості процесів, прискорення та ін.

Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища і процеси, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їх станів. За допомогою таких моделей можна описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток без проведення фактичних експериментів, які часто є надто вартісними або просто неможливими.

Питання про відповідність математичної моделі і реального явища вивчається на основі аналізу результатів дослідів та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Математичне моделювання, як метод наукового пізнання почало використовуватися людством багато століть тому назад, з моменту, коли були закладені основи диференціального та інтегрального числення. Першу математичну модель розроблено ще у XII столітті італійським математиком Фібоначчі. Спроби використовувати математичне моделювання у біомедичних напрямках розпочалися у 80-х роках XIX століття. Ідея кореляційного аналізу, висунута Гальтоном та вдосконалена біологом та математиком Пірсоном, виникла як результат спроб опрацювання біомедичних даних. Починаючи з 40-х років минулого століття математичні методи проникли у медицину і біологію через кібернетику та інформатику. Тому у XX столітті, крім технічних спеціальностей і природничих наук, математичне моделювання почала використовувати медицина, стоматологія і фармація.

Моделювання у медицині отримало самостійні функції і стало необхідним у процесі проведення досліджень. Сьогодні моделювання в медицині є засобом, який дозволяє встановлювати глибокі і складні взаємозв'язки між теорією та експериментом.

За останні роки активне впровадження в медицину методів математичного моделювання і створення автоматизованих, у тому числі комп'ютерних, систем розширило можливості діагностики та лікування захворювань.